Απολυτήριες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής**, Ημ/νία: 17 Μαΐου 2010

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1 Έστω $y_i = t_i - \bar{x}$ για $i = 1, \dots, \nu$ οι ν παρατηρήσεις που κατασκευάζουμε.

Για τον αριθμητικό τους μέσο είναι :

$$\bar{y} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})$$

$$= \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i - \sum_{i=1}^{\nu} \bar{x}\right) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i - \frac{1}{\nu}\cdot \nu\ \bar{x}$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Α2 Ορισμός του σταθμικού μέσου, σελ. 87 του σχολικού βιβλίου.

Α3 Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης θεωρείται ένα ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντα και λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.
Το κενό σύνολο $(\emptyset)$ είναι επίσης ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω το οποίο δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος τύχης και ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο.

Α4 $\alpha)$ Σ
$\beta)$ Λ
$\gamma)$ Σ
$\delta)$ Λ
$\varepsilon)$ Λ

(Σχόλιο : Η διατύπωση της πρότασης (γ) δεν είναι συντακτικά σωστή)

Θέμα Β

B1 Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές $x \in \mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη :

$x^2 - x + 1 \geq 0 \quad (1)$

Είναι $\Delta = -3 < 0$, οπότε η (1) επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι : $A_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \neq 1$ είναι :

$$\frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} = \frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)}{x-1}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$= \frac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = \frac{2x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}$$

Επομένως :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = \frac{2\cdot 1}{\sqrt{1-1+1}+1} = 1$$

B2 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}(x^2-x+1)' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $K(0, f(0))$ είναι $\lambda = f'(0) = -1$.

B3 Για τη γωνία ω της εφαπτόμενης ευθείας με τον άξονα $x'x$ ισχύει : $\varepsilon\varphi\omega = f'(0)$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}$$

Επειδή $\omega \in [0, \pi)$ είναι $\omega = \frac{3\pi}{4}$ (ή αλλιώς $\widehat{\omega} = 135°$)

Θέμα Γ

Γ1. Οι κλάσεις είναι της μορφής : $[\mathbf{0}\ ,\ \boldsymbol{c})$, $[\boldsymbol{c}\ ,\ \mathbf{2}\boldsymbol{c})$, $[\mathbf{2}\boldsymbol{c}\ ,\ \mathbf{3}\boldsymbol{c})$ κ.λπ.

Επειδή $\boldsymbol{x_2 = 6}$ είναι το κέντρο της δεύτερης κλάσης , ισχύει :

$$\boldsymbol{\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4}$$

Γ2.

	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	x_i^2	$x_i^2\nu_i$
[0,4)	2	20	40	4	80
[4,8)	6	40	240	36	1440
[8,12)	10	45	450	100	4500
[12,16)	14	30	420	196	5880
[16,20)	18	25	450	324	8100
Σύνολο		160	1600		20000

Για τη μέση τιμή $(\bar{x})$ του δείγματος είναι :

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i = \frac{1}{160}\cdot 1600 = 10\ \text{(κιλά)}$$

Για τη διασπορά (s^2) του δείγματος είναι :

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\nu_i - \frac{(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i)^2}{\nu}\right] = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\nu_i - \left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{160}\cdot\sum_{i=1}^{s} x_i^2\cdot\nu_i - (\bar{x})^2 = \frac{1}{160}\cdot 20000 - 100 = 25\ \ (\kappa\iota\lambda\acute{\alpha})$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = 5$

Σχόλιο: *Η διασπορά θα μπορούσε ισοδύναμα να υπολογιστεί και από τον τύπο:*

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2\,\nu_i$$

Γ3. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 50\%$$

Εφόσον $CV > 10\%$, το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Γ4. Θεωρούμε ότι το πλήθος των ατόμων είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε κάθε κλάση.

Αν στο διάστημα $[7,8) \subseteq [4,8)$ βρίσκονται κ άτομα, τότε έχουμε:

$$\frac{8-7}{8-4} = \frac{\kappa}{\nu_2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\kappa}{40} \Leftrightarrow \kappa = 10 \text{ άτομα}$$

Στο διάστημα $[8,12)$ βρίσκονται $\nu_3 = 45$ άτομα.

Αν στο διάστημα $[12,14] \subseteq [12,16)$ βρίσκονται λ άτομα, τότε έχουμε:

$$\frac{14-12}{16-12} = \frac{\lambda}{\nu_4} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{\lambda}{30} \Leftrightarrow \lambda = 15 \text{ άτομα}$$

Συνολικά, στο διάστημα $[7,14]$ βρίσκονται: $10 + 45 + 15 = 70$ άτομα. Δηλαδή για το ενδεχόμενο A είναι: $N(A) = 70$. Επειδή κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, για το ενδεχόμενο A από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{70}{160} = \dfrac{7}{16}$

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(P(A), +\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} - \frac{1}{2} \cdot 2\left(x - P(A)\right) = \frac{1}{x - P(A)} - x + P(A)$$

Θέτω:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} - x + P(A) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} = x - P(A) \Leftrightarrow (x - P(A))^2 = 1$$

$\Leftrightarrow x - P(A) = 1$, γιατί $x > P(A)$

Άρα: $x = P(A) + 1$.

Επίσης θέτω:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} - x + P(A) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} > x - P(A)$$

$\Leftrightarrow 1 > (x - P(A))^2$, γιατί $x - P(A) > 0$

$\Leftrightarrow x - P(A) < 1 \Leftrightarrow x < 1 + P(A)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και ακροτάτων:

	$P(A)$		1+ P(A)		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f		↗		↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(P(A), 1+P(A)]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1+P(A), +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1+P(A)$ το

$$f(x_0) = \ln\bigl(1+P(A)-P(A)\bigr) - \frac{1}{2}\bigl(1+P(A)-P(A)\bigr)^2 + P(B) = P(B) - \frac{1}{2}$$

Δ2. Αφού η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = \frac{5}{3}$ το $f(x_0) = 0$ είναι:

$$1+P(A) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

και $P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

Επίσης είναι: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$

Δ3. Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα Α και Β είναι το $(A \cap B)'$ με πιθανότητα: $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Δ4. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β είναι το $(A-B) \cup (B-A)$ με πιθανότητα:

$$P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ ,$$

διότι τα ενδεχόμενα $(A-B)$ και $(B-A)$ είναι ασυμβίβαστα.