

## ΘΕΜΑ Α

A1. α A2. β A3. α A4. δ

A5. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση: (iii)  $\left(\frac{\Delta L_\rho}{\Delta t}\right) = \frac{2}{5} MgL$

Παίρνοντας τις ροπές στο σύστημα ράβδος - σώμα ως προς τον άξονα περιστροφής:

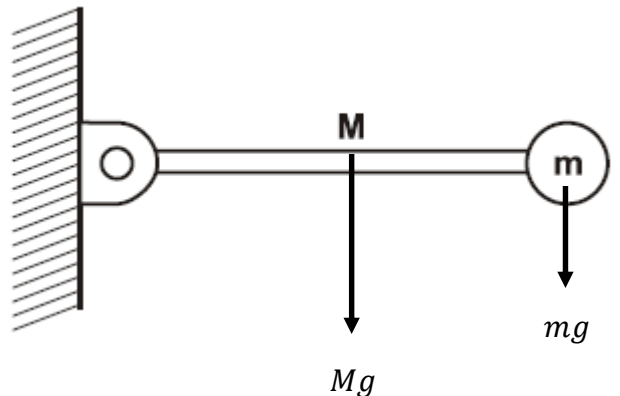
$$\Sigma \tau = I_{\alpha\gamma}$$

$$Mg \frac{L}{2} + mgL = \left(\frac{1}{3}ML^2 + \frac{M}{2}L^2\right) \alpha_\gamma.$$

$$Mg \frac{L}{2} + \frac{M}{2}gL = \left(\frac{2ML^2}{6} + \frac{3ML^2}{6}\right) \alpha_\gamma.$$

$$MgL = \frac{5ML^2}{6} \alpha_\gamma \Rightarrow \frac{6g}{5L} = \alpha_\gamma.$$

$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{ράβδου}} = I_\rho \cdot \alpha_\gamma = \frac{1}{3}ML^2 \frac{6g}{5L} = \frac{2MLg}{5}.$$



B2.

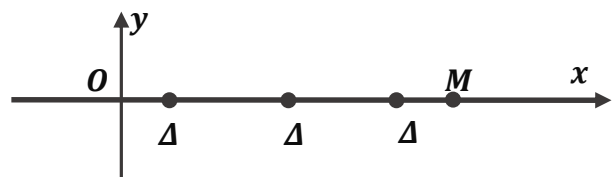
Σωστή απάντηση: iii.  $A' = A$

Αιτιολόγηση:

Έστω  $x_M$  η απόσταση του σημείου  $M$  από το  $x = 0$ .

Είναι:

$$x_M = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{12} = \frac{16\lambda}{12} = \frac{4}{3}\lambda$$



# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ή αλλιώς:

$$x_{3ου} = (2\kappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \text{ με } \kappa = 2 \text{ που δίνει:}$$

$$x_{3ου} = \frac{5\lambda}{4} \text{ για την απόσταση του 3ου δεσμού,}$$

$$\text{οπότε } x_M = \frac{5\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} = \frac{16\lambda}{12} = \frac{4}{3}\lambda.$$

Για το πλάτος του σημείου  $M$  είναι:

$$A' = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \right| = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot 4\lambda}{3\lambda}\right) \right| = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{3} \right| = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \right|$$

$$\text{Οπότε τελικά: } A' = \left| 2A \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = A$$

### Β3. Σωστή απάντηση: (i) $(m_1 + m_2)g\eta\mu\theta > k \cdot A$

Οι δυνάμεις στον άξονα της ταλάντωσης του  $m_2$

φαίνονται στο σχήμα.

$$\Sigma F(x) = -D_2 x \Rightarrow$$

$$N - B_2\eta\mu\theta = -D_2 x \Rightarrow N = B_2\eta\mu\theta - D_2 x \quad (1)$$

Για το σύστημα των δύο σωμάτων η  $\omega$  είναι:

$$\omega^2 = \frac{k}{m_1 + m_2}.$$

Η σταθερά επαναφοράς για το (2) είναι  $D_2 = m_2\omega^2$

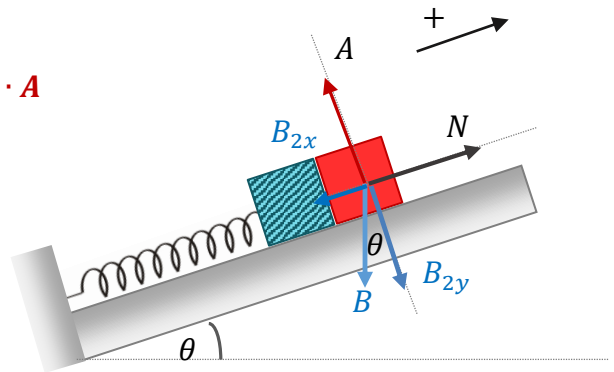
$$D_2 = \frac{km_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow N = m_2g\eta\mu\theta - \frac{km_2}{m_1 + m_2}x.$$

Η δύναμη  $N$  κινδυνεύει να μηδενιστεί στις θετικές απομακρύνσεις. Η ελάχιστη τιμή της  $N$  είναι για τη θέση  $x = +A$ .

Για την ελάχιστη αυτή τιμή για να μη χαθεί η επαφή απαιτούμε:

$$N_{min} \geq 0 \Rightarrow m_2g\eta\mu\theta - \frac{km_2A}{m_1 + m_2} \geq 0 \Rightarrow m_2g\eta\mu\theta > \frac{km_2A}{m_1 + m_2} \Rightarrow (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta > k \cdot A$$



# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την Α.Δ.Ε. παίρνουμε:

$$E_T = U_E + U_B \Rightarrow U_E = E_T - U_B \Rightarrow U_E = E_T - \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

Όμως:  $U_E = 8 \cdot 10^{-2} - 8 \cdot 10^{-2} \cdot i^2$ , οπότε τελικά προκύπτει:

$$E_T = 8 \cdot 10^{-2} \text{ J και } \frac{1}{2} L = 8 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow L = 16 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

$$\text{Επίσης: } E_T = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot V \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 \Rightarrow C = \frac{2E_T}{V^2} \Rightarrow C = \frac{16 \cdot 10^{-2}}{16 \cdot 10^{+2}} \Rightarrow C = 10^{-4} \text{ F}$$

$$\text{Άρα } T = 2\pi \cdot \sqrt{LC} = 2\pi \cdot \sqrt{16 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}} = 2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 8\pi \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\text{και } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{8\pi} \cdot 10^3 \Rightarrow \omega = \frac{1}{4} \cdot 10^3 \text{ rad/s.}$$

Γ2. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  έχουμε:  $q = +Q$ ,  $i = 0$ .

Οπότε:  $q = Q \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$  και  $i = -I \cdot \eta\mu\omega t$

Επομένως είναι:

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega t}{C} \Rightarrow U_E = 8 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega t$$

Τη χρονική στιγμή  $t = \frac{T}{12}$  έχουμε:

$$U_E = 8 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \left( \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} \right) \Rightarrow U_E = 8 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu^2 \left( \frac{\pi}{6} \right) = 6 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Γ3. Ισχύει:

$$E_{\text{αντ}} = -L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{E_{\text{αντ}}}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{V_C}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{q}{C \cdot L}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = -\omega^2 \cdot q \Rightarrow \left| \frac{di}{dt} \right| = \omega^2 |q|$$

$$\text{Έχουμε: } U_E = 3U_B \Rightarrow U_B = \frac{1}{3} U_E$$

Από την Α.Δ.Ε. παίρνουμε:

$$E_T = U_E + U_B \Rightarrow E_T = U_E + \frac{1}{3} U_E \Rightarrow E_T = \frac{4}{3} U_E \Rightarrow U_E = \frac{3}{4} E_T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \Rightarrow |q| = \frac{\sqrt{3}}{2} |Q|$$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Όμως:

$$E_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \Rightarrow Q = \sqrt{2C \cdot E_T} \Rightarrow Q = 4 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$\text{Οπότε: } |q| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι: } \left| \frac{di}{dt} \right| &= |\omega^2 q| = \frac{1}{16} \cdot 10^6 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 10^3 \text{ A/s} \end{aligned}$$

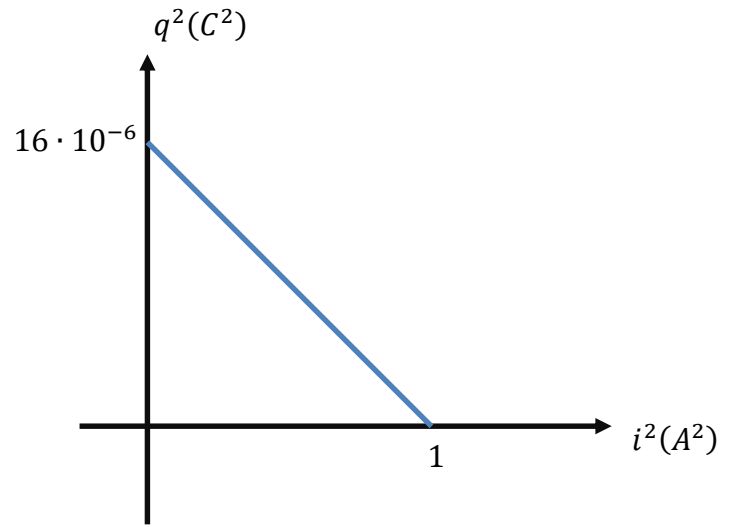
$$= 125 \cdot \sqrt{3} \text{ A/s}$$

Γ4. Από Α.Δ.Ε. :

$$E_T = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$$

$$8 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} \cdot 10^4 q^2 + \frac{1}{2} 16 \cdot 10^{-2} i^2$$

$$q^2 = 16 \cdot 10^{-6} - 16 \cdot 10^{-6} i^2 \text{ (SI)}$$



## ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \Sigma F(x) = B \sigma \nu \nu \varphi - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{\gamma \omega \nu} \text{ δηλαδή } T \cdot r = I \cdot a_{\gamma \omega \nu} \quad (2)$$

$$\text{Όμως } a_{cm} = a_{\gamma \omega \nu} \cdot r \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow a_{cm} = \frac{B \sigma \nu \nu \varphi - T}{m} \quad (4)$$

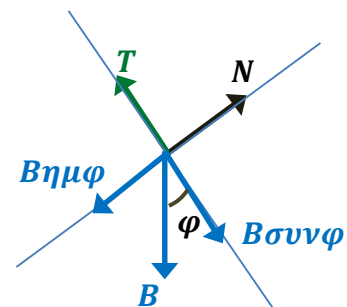
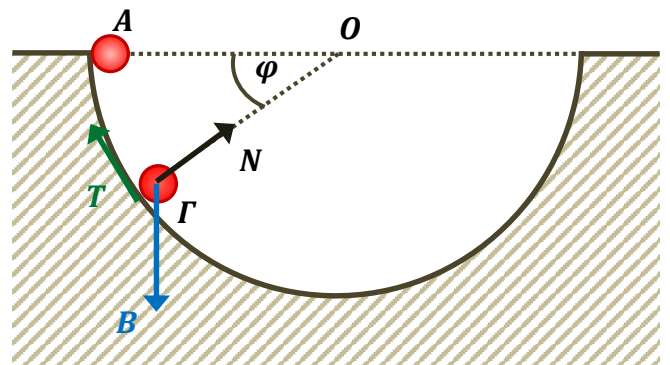
$$(2) \Rightarrow a_{\gamma \omega \nu} = \frac{T \cdot r}{I} \quad (5)$$

$$(4), (5) \rightarrow \frac{B \sigma \nu \nu \varphi - T}{m} = \frac{T \cdot r}{I} \cdot r$$

$$\frac{B \sigma \nu \nu \varphi - T}{m} = \frac{T \cdot r^2}{\frac{2}{5} m r^2} \Leftrightarrow B \sigma \nu \nu \varphi - T = \frac{5}{2} T$$

$$B \sigma \nu \nu \varphi = \frac{7T}{2} \Leftrightarrow T = \frac{2B \sigma \nu \nu \varphi}{7} = \frac{2 \cdot 14 \cdot \sigma \nu \nu \varphi}{7}$$

$$T = 4 \sigma \nu \nu \varphi$$



Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999  
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

**Δ2.** Η ακτίνα της τροχιάς του κέντρου μάζας του σώματος είναι:

$$R - \frac{R}{8} = \frac{7R}{8}.$$

Για το ύψος  $h$  έχω:

$$\eta_{\mu 30} = \frac{h}{\frac{7R}{8}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8h}{7R} \Rightarrow \frac{7R}{16} = h.$$

Εφαρμόζω ΑΔΜΕ: ( $w_N = 0$ ,  $w_{T\sigma\tau} = 0$ )

$$E_{\mu\eta\chi}(\Gamma) = E_{\mu\eta\chi}(A) \text{ με } U_{\Gamma} = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega^2 = mgh \Rightarrow$$

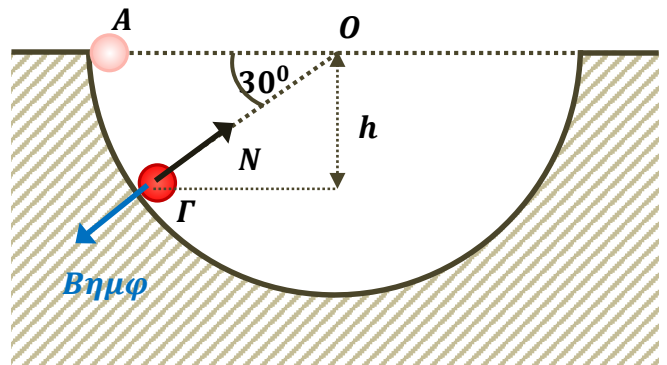
$$\Rightarrow \frac{7}{10}mv_{\Gamma}^2 = mgh \Rightarrow \frac{7}{10}v_{\Gamma}^2 = \frac{70R}{16} \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma}^2 = \frac{10 \cdot 16}{16} \Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{10} \text{ m/s} \text{ στο } \Gamma$$

Η συνθήκη κεντρομόλου στο  $\Gamma$  δίνει:

$$N - mg\eta\mu\varphi = m \frac{v_{\Gamma}^2}{\frac{7R}{8}} \Rightarrow N = mg\eta\mu\varphi + m \frac{8v_{\Gamma}^2}{7R}$$

$$\Rightarrow N = 14 \frac{1}{2} + 1,4 \cdot \frac{8 \cdot 10}{7 \cdot 1,6} = 7 + 10 = 17 \text{ N}$$



**Δ3.** Εφαρμόζω ΑΔΜΕ από το Δ ως το E:

$$E_{MHX(\Delta)} = E_{MHX(E)} \text{ με } v_{\Delta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\Delta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega_{\Delta}^2 = \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega_E^2 + mg\left(\frac{7R}{8}\right)$$

$$\frac{7v_{\Delta}^2}{10} = \frac{7v_E^2}{10} + g \frac{7R}{8} \Rightarrow \frac{36}{10} = \frac{v_E^2}{10} + 2 \Rightarrow$$

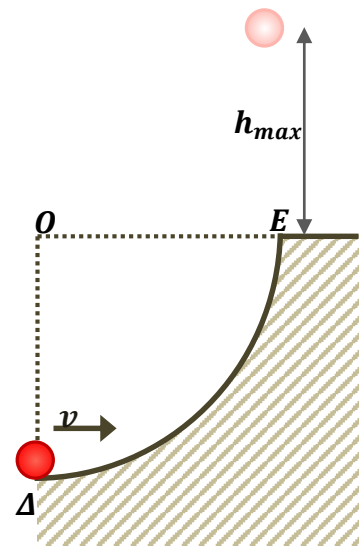
$$36 = v_E^2 + 20 \Rightarrow v_E^2 = 16 \Rightarrow v_E = 4 \text{ m/s}$$

Στη συνέχεια το σώμα διατηρεί την περιστροφική κινητική του ενέργεια αμετάβλητη.

Εφαρμόζουμε νέα ΑΔΜΕ ως το μέγιστο ύψος με  $U_E = 0$

$$\frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega_E^2 = mgh_{max} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega_E^2$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_E^2}{2g} = \frac{16}{20} = 0,8m$$



# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Δ4. Υπάρχει ρυθμός μεταβολής μόνο για την κινητική ενέργεια μεταφορικής κίνησης:

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\text{μεταφορική}} = -m.g.v_E = -14 \cdot 4 = -56 \text{ J/s}$$

Λόγω της απώλειας επαφής με το έδαφος η  $T_{\text{στατ}}$  που δημιουργεί ροπή μηδενίζεται για την κίνηση του σώματος μετά το σημείο  $E$ . Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, αφότου αυτή χάνει επαφή με την επιφάνεια του ημισφαιρίου, είναι:

$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right) = \Sigma \vec{\tau} = 0$$

*Επιμέλεια:*

*Μπάμπης Μπέσης, Στέφανος Μαυρογιώργης, Νίκος Πουγκιάλης, Χαρίλαος Τσαγκαράκης, Ιωάννης Τριανταφύλλου*