

## Θέμα Α

**A1.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **194**

**A2.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **188**

**A3.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **259**

**A4.** **α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό**

## Θέμα Β

**B1.** Έχουμε:  $|z - 4| = 2|z - 1| \Leftrightarrow |z - 4|^2 = 4|z - 1|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z - 4)(\bar{z} - 4) = 4(z - 1)(\bar{z} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \stackrel{|z| \geq 0}{\Leftrightarrow} |z| = 2$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών  $z$  ανήκουν στον κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 2$ .

**B2. α.** Ισχύει  $|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$

Ομοίως  $\bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$

Έχουμε:

$$\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2 \cdot \frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2 \cdot \frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$$

Επίσης:  $\bar{w} = w \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{Im}(w)i = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$

**β.** Έχουμε:

$$|w| = \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq \frac{2|z_1|}{|z_2|} + \frac{2|z_2|}{|z_1|}$$

$$= \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = 4$$

Αφού  $w \in \mathbb{R}$  παίρνουμε  $|w| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq w \leq 4$ .

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

**B3.** Έχουμε:

$$w = -4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = -2z_1z_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1 \quad (1)$$

$$(B\Gamma) = |z_3 - z_1| \stackrel{(1)}{=} |2iz_1 + z_1| = |z_1||1 + 2i| = 2\sqrt{1^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$(A\Gamma) = |z_3 - z_1| = |2iz_2 - z_1| = |z_1||-1 + 2i| = 2\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

Αφού  $(B\Gamma) = (A\Gamma)$ , το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

## Θέμα Γ

**Γ1.** Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = \left( \frac{e^x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{e^x(x^2 + 1) - 2xe^x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2} > 0$$

για κάθε  $x \neq 1$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 1$ , είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα:

$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$ , όπου:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\text{αφού: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $(0, +\infty)$ .

**Γ2.** Αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα θα έχει την ιδιότητα 1-1.

Επομένως η εξίσωση γράφεται:

$$f(e^{3-x}(x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x}(x^2 + 1)) = f(2) \Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}(x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{(x^2 + 1)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2} \quad (1)$$

Αφού ο αριθμός  $y = \frac{e^3}{2} > 0$  ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$  η εξίσωση (1) θα έχει μια τουλάχιστον λύση. Η λύση αυτή είναι μοναδική αφού η  $f$  έχει την ιδιότητα «1-1».

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \geq 0$$

Η  $F$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $F'(x) = f(x) > 0$ .

Για κάθε  $x > 0$  είναι  $2x < 4x$ .

Για την  $F$  εφαρμόζουμε το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[2x, 4x]$ .

Η  $F$  είναι συνεχής στο  $[2x, 4x] \subseteq [0, +\infty]$  και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(2x, 4x)$ .

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (2x, 4x)$  τέτοιο ώστε:

$$F'(x_1) = \frac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = \frac{\int_0^{4x} f(t)dt - \int_0^{2x} f(t)dt}{2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} \quad (2)$$

Όμως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, επομένως για  $x_1 < 4x$  παίρνουμε:

$$f(x_1) < f(4x) \Leftrightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x f(4x), \quad x > 0$$

**β' τρόπος:**

Για κάθε  $x$  με  $0 < 2x \leq t < 4x$  αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε:

$$f(t) < f(4x) \Leftrightarrow f(t) < f(4x)$$

Επομένως:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x) dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x) \cdot [t]_{2x}^{4x}$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x) \cdot (4x - 2x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x \cdot f(4x)$$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Γ4. Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με:

$$g'(x) = \left( \frac{1}{x} \cdot \int_{2x}^{4x} f(t) dt \right)' \Leftrightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \int_{2x}^{4x} f(t) dt + \frac{1}{x} \cdot \left( \int_{2x}^{4x} f(t) dt \right)'$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \int_{2x}^{4x} f(t) dt + \frac{1}{x} \cdot (f(4x) \cdot (4x)' - f(2x) \cdot (2x)')$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \int_{2x}^{4x} f(t) dt + \frac{1}{x} \cdot (4 \cdot f(4x) - 2 \cdot f(2x))$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2} \left( 4x \cdot f(4x) - 2x \cdot f(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt \right)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) > \frac{1}{x^2} (4x \cdot f(4x) - 2x \cdot f(2x) - 2x f(4x))$$

$$\Leftrightarrow g'(x) > \frac{1}{x^2} (2x \cdot f(4x) - 2x \cdot f(2x))$$

$$\Leftrightarrow g'(x) > \frac{2}{x} (f(4x) - f(2x))$$

Αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα για κάθε  $x > 0$  θα ισχύει:

$$2x < 4x \Leftrightarrow f(4x) - f(2x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$$

Επομένως, η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο  $x = 0$  για να είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty]$ .

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left( \int_{2x}^{4x} f(t) dt \right)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(4x) \cdot (4x)' - f(2x) \cdot (2x)')$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (4f(4x) - 2f(2x)) = 2f(0) = 2 \cdot 1 = g(0)$$

με χρήση του κανόνα de l' Hospital.

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

## Θέμα Δ

### Δ1.

Ισχύει:  $f'(x) \cdot [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} + f'(x) \cdot e^{-f(x)} = 2$$

$[e^{f(x)} - e^{-f(x)}]' = [2x]'$ . Άρα υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  ώστε:  $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$

Για  $x = 0$  η προηγούμενη σχέση δίνει  $c = 0$  και επομένως ισχύει:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$$

$$e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x$$

$$(e^{f(x)})^2 - 2x \cdot e^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1$$

$$(e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1$$

$$|e^{f(x)} - x| = \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Επειδή ισχύει:  $x^2 + 1 \neq 0$  ισχύει  $h(x) = e^{f(x)} - x \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και αφού  $h(0) = 1$

είναι  $h(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Από την (1) προκύπτει:  $e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$




**Δ2. α.** Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} \cdot (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

και  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την  $f''$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$			

Σημείο Καμπής

Η  $f$  είναι κυρτή στο  $(-\infty, 0]$  και κοίλη στο  $[0, +\infty)$  και έχει σημείο καμπής το  $O(0, f(0)) = (0, 0)$ .

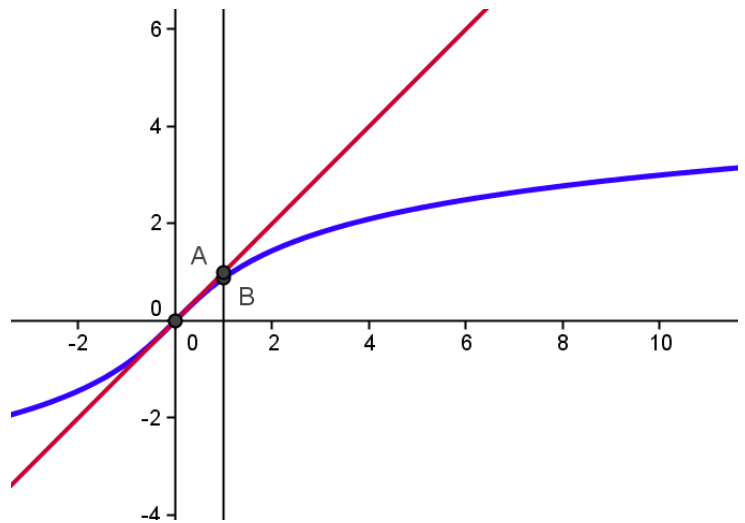
**β.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $(0, f(0))$  είναι η:

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Επειδή η  $f$  είναι κοίλη στο  $[0, +\infty)$  η  $y = x$  βρίσκεται πάνω από τη  $C_f$  με εξαίρεση το σημείο επαφής  $(0, 0)$ .

Επομένως  $f(x) \leq x \Leftrightarrow x - f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \geq 0$ .

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου  $\Omega$  είναι το:



$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^2 |x - f(x)| dx \\ &= \int_0^1 (x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) dx = \\ &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 (x)' f(x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 x f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \left[ \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

**Δ3.** Χρησιμοποιώντας ότι  $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$  για  $x > 0$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) \ln|f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} (e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) \cdot f(x) \cdot \ln f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} (e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) \cdot f(x) \cdot \ln f(x) \quad (1) \end{aligned}$$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Για το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot \ln f(x)$  θέτουμε  $f(x) = u$  και  $u_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  οπότε (αφού  $f$  γνησίως αύξουσα) είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot \ln f(x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} u \cdot \ln u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-u) = 0$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1)}{f(x)}$  μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de l'Hospital αφού:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 = e^0 - 1 = 0$  και  $f(0) = 0$ .

Επομένως παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1)'}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x)} = 0$$

γιατί:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = 1$  αφού η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x = 0$  και  $f(0) = 0$ .

Άρα από την (1) προκύπτει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) \ln |f(x)| = 0$

## Δ4.

Έστω  $G(x) = (x - 2) \cdot \left[ 1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right] + (x - 3) \cdot \left[ 8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right]$ ,  $x \in [2,3]$

Η  $G$  είναι συνεχής στο  $[2,3]$ . Είναι:  $G(2) = 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8$

Για κάθε  $t \in [0,2]$  ισχύει:  $f(t) \leq t \Rightarrow f^2(t) \leq t^2$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $t = 0$ ,  
Άρα:

$$\int_0^2 f^2(t) dt < \int_0^2 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\text{και } 3 \int_0^2 f^2(t) dt < 8 \Leftrightarrow 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8 < 0 \Leftrightarrow G(2) < 0$$

$$G(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt.$$

Για κάθε  $t \in [0,1]$  ισχύει  $f(t^2) \leq t^2$  με την ισότητα μόνο για  $t = 0$ .

$$\text{Άρα } \int_0^1 f(t^2) dt < \int_0^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(t^2) dt < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt > 0 \Leftrightarrow G(3) > 0$$

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση  $G(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα  $x_0$  στο  $(2,3)$ .

Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Δημήτρης Κότσιρας, Ηρώ Μαρκάκη