<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελίδα 194 σχολικού βιβλίου.
Α2. Θεωρία, σελίδα 188 σχολικού βιβλίου.
Α3. Θεωρία, σελίδα 259 σχολικού βιβλίου.
Α4. α) Λ, β) →Σ , γ) →Λ , δ) Σ, ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$$\left|(x-4)+yi\right| = 2\left|(x-1)+yi\right| \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4\left[(x-1)^2 + y^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4\left(x^2 - 2x + 1 + y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2.$$

Δηλαδή προκύπτει κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 2.

(β' τρόπος) Έχουμε διαδοχικά:

$$|z-4| = 2\cdot|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 2^2\cdot|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)\cdot(\bar{z}-4) = 4\cdot(z-1)\cdot(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\bar{z} - 4\cdot\bar{z} - 4z + 16 = 4\cdot\left(z\cdot\bar{z} - \bar{z} - z + 1\right) \Leftrightarrow z\cdot\bar{z} + 16 = 4z\cdot\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\cdot\bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z| = 2.$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ= 2.

Β2. ***α)*** Ο w είναι πραγματικός, αν και μόνο αν, είναι $\bar{w} = w$.

Πράγματι

$$\bar{w} = w \Leftrightarrow \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow \frac{\left(\bar{z}_1^{\,2} + \bar{z}_2^{\,2}\right)}{\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2} = \frac{\left(z_1^2 + z_2^2\right)}{z_1\cdot z_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1^{\,2}\cdot z_1\cdot z_2 + \bar{z}_2^{\,2}\cdot z_1\cdot z_2 = z_1^2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 + z_2^2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z_1\bar{z}_1\right)\bar{z}_1\cdot z_2 + \left(z_2\bar{z}_2\right)z_1\cdot\bar{z}_2 = \left(z_1\bar{z}_1\right)z_1\cdot\bar{z}_2 + \left(z_2\bar{z}_2\right)z_2\cdot\bar{z}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2\cdot\bar{z}_1\cdot z_2 + |z_2|^2\cdot z_1\cdot\bar{z}_2 = |z_1|^2\cdot z_1\cdot\bar{z}_2 + |z_2|^2\cdot z_2\cdot\bar{z}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\bar{z}_1\cdot z_2 + 4z_1\bar{z}_2 = 4z_1\cdot\bar{z}_2 + 4z_2\bar{z}_1 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ αληθές.}$$

Άρα $\bar{w} = w$ και $w \in \mathbb{R}$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|w| \le 4$.

Πράγματι:

$$|w| \le 4 \Leftrightarrow \left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right| \le 4 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1^{\,2}+z_2^{\,2}}{z_1 \cdot z_2}\right| \le 2 \Leftrightarrow \left|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}\right| \le 2|z_1|\cdot|z_2| \Leftrightarrow \left|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}\right| \le 8.$$

Η τελευταία ισχύει διότι:

$$\left|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}\right| \le \left|z_1^{\,2}\right|+\left|z_2^{\,2}\right| \Leftrightarrow \left|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}\right| \le |z_1|^2+|z_2|^2 \Leftrightarrow \left|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}\right| \le 2^2+2^2 \Leftrightarrow \left|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}\right| \le 8.$$

Β3. Αν w = - 4 είναι

$$\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-2 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=-2z_1\cdot z_2 \Leftrightarrow \left(z_1+z_2\right)^2=0.$$

Από τη σχέση $\left(z_1+z_2\right)^2=0$ προκύπτει $z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2$.

$|z_3-z_1|=|2iz_1-z_1|=|z_1|\cdot|2i-1|=2\cdot|-1+2i|=2\sqrt{5}$.

$|z_3-z_2|=|2iz_1+z_1|=|z_1|\cdot|2i+1|=2\cdot\sqrt{5}$.

Προκύπτει $|z_3-z_1|=|z_3-z_2| \Leftrightarrow (\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{B\Gamma})$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f\,'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad x\in\mathbb{R}$.

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών για την f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f ΄		+	0	+	
f			$\nearrow$		

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών θα είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\,\frac{1}{x^2+1}\right)=0\cdot 0=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)=+\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f\left(2\right)$. Όμως η f ως γνησίως αύξουσα είναι και 1- 1. Άρα ισοδύναμα γράφεται : $e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow\dfrac{e^3}{2}=\dfrac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{e^3}{2}$. Όμως η τιμή $\dfrac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, η οποία είναι και γνησίως αύξουσα. Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f\left(x_0\right)=\dfrac{e^3}{2}$. Δηλαδή, η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$h(x)=\int_1^x f\left(t\right)dt$, $x\in\left(0,+\infty\right)$, με $h'(x)=f\left(x\right)$.

Η σχέση $\int_{2x}^{4x} f\left(t\right)dt<2x\,f\left(4x\right)$ με x> 0, γράφεται

$$\int_{2x}^{1} f\left(t\right)dt+\int_{1}^{4x} f\left(t\right)dt<2x\,f\left(4x\right)\Leftrightarrow\int_{1}^{4x} f\left(t\right)dt-\int_{1}^{2x} f\left(t\right)dt<2x\,f\left(4x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}<f\left(4x\right).\ (1)$$

Όμως για την h ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $\left[2x,4x\right]$ οπότε υπάρχει $\xi\in\left(2x,4x\right)$ ώστε

$$\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}=h'(\xi)\Leftrightarrow\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}=f\left(\xi\right).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι $f\left(\xi\right)<f\left(4x\right)$ με $2x<\xi<4x$, που όμως ισχύει διότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ4. Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$ διότι:

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$g(x)=\frac{\int_{2x}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{4x} f(t)dt}{x}=\frac{-\int_{1}^{2x} f(t)dt+\int_{1}^{4x} f(t)dt}{x}=\frac{-h(2x)+h(4x)}{x}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(4x)-h(2x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4h'(4x)-2h'(2x)}{(x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(4f\left(4x\right)-2f\left(2x\right)\right)=4f(0)-2f(0)=4-2=2$.

(Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=0$).

Άρα η g είναι συνεχής στο 0.

Για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$ είναι:

$$g'(x)=\left(\frac{h(4x)-h(2x)}{x}\right)'=\left(\frac{h(4x)}{x}\right)'-\left(\frac{h(2x)}{x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(h(4x)\right)'\cdot x-h(4x)\cdot x'}{x^2}-\frac{\left(h(2x)\right)'\cdot x-h(2x)\cdot x'}{x^2}=$$

$$=\frac{4f\left(4x\right)\cdot x-h(4x)-2f\left(2x\right)\cdot x+h(2x)}{x^2}=$$

$$=\frac{\left[2xf\left(4x\right)-2xf\left(2x\right)\right]+2xf\left(4x\right)-\left[h\left(4x\right)-h\left(2x\right)\right]}{x^2}=$$

$$=2\cdot\frac{f\left(4x\right)-f\left(2x\right)}{x}+\frac{2xf\left(4x\right)-\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt}{x^2}.$$

Όμως $4x>2x$ και f γνησίως αύξουσα , άρα $f\left(4x\right)>f\left(2x\right)\Leftrightarrow f\left(4x\right)-f\left(2x\right)>0$

και λόγω του Γ_3 είναι $2xf\left(4x\right)-\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt>0.$

Άρα $g'\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$, οπότε (λόγω της συνέχειας στο 0), η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)\cdot e^{f(x)}+f'(x)\cdot e^{-f(x)}=2\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=\left(2x\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Για $x=0$ είναι: $e^{f(0)}-e^{-f(0)}=c$ και επειδή $f(0)=0$, προκύπτει $c=0$.

Άρα $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Leftrightarrow e^{f(x)}-\dfrac{1}{e^{f(x)}}=2x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)^2-1=2x\cdot e^{f(x)}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)^2-2x\cdot e^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1\neq0,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

και επειδή η $e^{f(x)}-x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι η $e^{f(x)}-x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Όμως $e^{f(0)}-0=1>0$.

Άρα $e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1},\quad$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1},\quad$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. **α)** Είναι $f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ x \in \mathbb{R}$$

και $f''(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)} = \dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}, \ x \in \mathbb{R}$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	∪ (κυρτή)		∩ (κοίλη)

προκύπτει ότι η f είναι: κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$.

β) Είναι $x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Πράγματι:

(α' τρόπος):

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x - f(x)$ στο $[0, 1]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με

$$g'(x) = (x - f(x))' = 1 - f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0 \ \forall x \in [0,1],$$

με την ισότητα $g'(x) = 0$ να ισχύει μόνον για x = 0.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 1].

Οπότε $g(x) \geq g(0)$ $\forall$ $x \in [0, 1]$. Όμως $g(0) = 0 - f(0) = 0$.

Άρα $g(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in [0, 1]$, άρα $x - f(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in [0, 1]$.

(β' τρόπος):

Η ανισότητα $x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής:

Επειδή $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, η εφαπτόμενη της C_f στο $[0, +\infty)$ έχει εξίσωση

$y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = x$.

Η f όμως είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται "κάτω" από την εφαπτομένη της $y = x$ στο O (0, 0) για το διάστημα $[0, +\infty)$, άρα και το $[0,1]$.

Έτσι $f(x) \leq x$ για $x \in [0,1] \Leftrightarrow x - f(x) \geq 0$ για $x \in [0,1]$.

Έτσι είναι $E = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x)dx =$

$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ (1)

Είναι

- $\int_0^1 x dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\dfrac{1}{2} - 0\right) = \dfrac{1}{2}$.
- $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 x' \cdot \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$

$$= \left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] - \left[\sqrt{2}-1\right] = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}+1.$$

Οπότε η (1) γράφεται:

$$E = \frac{1}{2} - \left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}+1\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3. Επειδή $f\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι f ↑ στο $\mathbb{R}$.

Οπότε για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right] = 0$.

τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln|f(x)|\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln f(x)\right) = \lim\limits_{u\to 0^+}\left(\ln u\right) = -\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln f(x)\right] =$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\cdot f(x)\cdot \ln f(x)\right]$$

Υπολογίζουμε

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^{2(t)dt}}-1}{f(x)} \underset{\text{LH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^{2(t)dt}}\cdot f^2(x)}{f\,'(x)} = \frac{1\cdot 0}{1} = 0.$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)\ln f(x)\right] \overset{f(x)=u}{=} \lim_{u\to 0^+}\left(u\cdot \ln u\right) = \lim_{n\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \underset{LH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{n\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -\lim_{n\to 0^{-1}} u = 0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\cdot f(x)\cdot \ln f(x)\right] = 0$.

Δ4. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{(x-2)\left(1-3\int\limits_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+\left(x-3\right)\left(8-3\int\limits_0^{x} f^2\left(t\right)dt\right)}{(x-2)(x-3)} = 0,\ x\in\left(2,3\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)\,dt\right)$,

η οποία είναι συνεχής στο [2, 3] με

$g(2)=-8+3\int_0^2 f^2(t)\,dt$ και ` $g(3)=1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt$

Όμως στο ερώτημα Δ_2 έχει αποδειχθεί ότι $f(x)\le x$, για κάθε $x\ge 0$. Επειδή είναι και f(x) ≥ 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$ προκύπτει : $f^2(x)\le x^2$ οπότε και $\int_0^2 f^2(x)\,dx<\int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}$

Άρα $g(2)<0$.

Από την $f(x)\le x$ τώρα θέτοντας όπου x το x^2, προκύπτει $f\left(x^2\right)\le x^2$ και έτσι

$\int_0^1 f\left(x^2\right)dx<\int_0^2 x^2\,dx=\frac{1}{3}$. Άρα $g(3)>0$.

Συνεπώς $g(2)g(3)<0$ και έτσι από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(2,3)$ ώστε $g(x_0)=0$,δηλαδή ισοδύναμα η εξίσωση

$$\frac{(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)\,dt\right)}{(x-2)(x-3)}=0$$

, έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (2, 3).