Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας**,

Ημ/νία: **20 Μαΐου 2016**

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150-151

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 87

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 40

Α1. α. Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$

Και με βάση το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	τοπικό μέγιστο	$\searrow$	τοπικό ελάχιστο	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,3]$.
Επίσης, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ το $y = f(2) = \frac{11}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ το $y = f(3) = \frac{7}{2}$.

Β2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ δηλαδή στο $A(0, -1)$ είναι της μορφής: (ε): $y = \alpha x + \beta$, με $a = f'(0) = 6$.

Επομένως είναι η $y = 6x + \beta$.

Όμως η ευθεία διέρχεται από το σημείο A, δηλαδή $A(0, -1) \in (\varepsilon)$

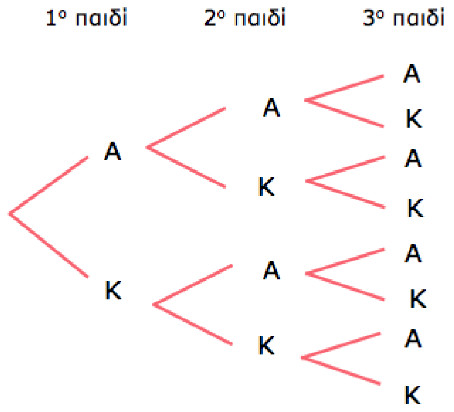
$\Leftrightarrow -1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$. Τελικά, η ευθεία είναι: $y = 6x - 1$.

Β3. Για το όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-6)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-6)=-7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Άρα ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\{AAA,\ AAK,\ AKA,\ AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$

Γ2. $A=\{KAA\ ,\ KAK\ ,\ KKA\ ,\ KKK\}$

$B=\{AKK\ ,\ KAK\ ,\ KKA\ ,\ KKK\}$

$\Gamma=\{AAA\ ,\ AAK\ ,\ KKA\ ,\ KKK\}$

Γ3. α) Προκύπτει ότι

$\Delta=A\cap B=\{KAK\ ,\ KKA\ ,\ KKK\}$

$E=A\cup B=\{AKK\ ,\ KAA\ ,\ KAK\ ,\ KKA\ ,\ KKK\}$

$Z=\Gamma-E=\{AAA\ ,\ AAK\}$

Έχουμε ότι: $N(\Omega)=8\ ,\ N(\Delta)=3\ ,\ N(E)=5\ ,\ N(Z)=2.$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα παίρνουμε:

$$P(\Delta)=\frac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{3}{8}$$

$$P(E)=\frac{N(E)}{N(\Omega)}=\frac{5}{8}$$

$$P(Z)=\frac{N(Z)}{N(\Omega)}=\frac{2}{8}$$

β) Έχουμε ότι: $H = A' \cap B' = (A \cup B)' = E' = \{AAA, \ \ AAK\ , \ \ AKA\}$.

$$\Theta = (A - B) \cup (B - A) = \{KAA\} \cup \{AKK\} = \{KAA\ , AKK\}.$$

Επομένως:

$$P(H) = \frac{N(H)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8} \quad \kappa\alpha\iota \;\; P(\Theta) = \frac{N(\Theta)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Παρατήρηση: *Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν και από τους κανόνες λογισμού πιθανοτήτων.*

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε ότι οι κλάσεις είναι της μορφής: $[8, 8+c), \ \ [8+c, 8+2c),$

$[8+2c, 8+3c)$ και $[8+3c, 8+4c)$.

Για την κεντρική τιμή x_2 της δεύτερης κλάσης ισχύει:

$$x_2 = \frac{8+c+8+2c}{2} \Leftrightarrow 14 = \frac{16+3c}{2} \Leftrightarrow 16+3c = 28 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4.$$

Δ2. Επομένως οι κλάσεις είναι: $[8,12)$, $[12,16)$, $[16,20)$ και $[20,24)$ ενώ οι υπόλοιπες κεντρικές τιμές είναι: $x_1 = 10$, $x_3 = 18$ και $x_4 = 22$.

Αν ν το πλήθος των παρατηρήσεων τότε είναι:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \Leftrightarrow \nu = 45 + \nu_4\ , \quad (1)$$

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}(10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22 \cdot \nu_4) = 14$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}(10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22 \cdot \nu_4) = 14$$

$$\Leftrightarrow 590 + 22 \cdot \nu_4 = 14 \cdot \nu$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) προκύπτει: $590 + 22 \cdot \nu_4 = 14 \cdot (45 + \nu_4)$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot \nu_4 = 40 \Leftrightarrow \nu_4 = 5$$

και $\nu = 50$. Ο πίνακας γίνεται:

$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{\nu_i}$
$[\mathbf{8}, \mathbf{12})$	10	20
$[\mathbf{12}, \mathbf{16})$	14	15
$[\mathbf{16}, \mathbf{20})$	18	10
$[\mathbf{20}, \mathbf{24})$	22	5
	Σύνολο	**50**

Δ3. Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις, οι υπολογιστές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά είναι όσοι ανήκουν στο διάστημα $[9, 24)$, δηλαδή $[9,12)$ που είναι υποδιάστημα της $1^{ης}$ κλάσης καθώς και οι παρατηρήσεις που ανήκουν στις κλάσεις $[12, 16)$, $[16,20)$ και $[20,24)$.

Έστω x το πλήθος των υπολογιστών που έτρεξαν το πρόγραμμα σε χρόνο που ανήκει στο διάστημα $[9,12)$. Έχουμε:

$$\frac{12-9}{12-8} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow x = 15$$

Επίσης, $\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 30$ υπολογιστές έτρεξαν το πρόγραμμα σε χρόνο που ανήκει στο διάστημα $[12,24)$.

Συνεπώς, $15 + 30 = \mathbf{45}$ υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά.

Δ4. Για τη διακύμανση s^2 των παρατηρήσεων έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i = \frac{16 \cdot 20 + 0 \cdot 15 + 16 \cdot 10 + 64 \cdot 5}{50} = 16$$

Η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{64} = 4$ και ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι:

$$CV_x = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$$

Επειδή $CV_x > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Έστω t_i, $i = 1, \ldots, 50$ οι αρχικές παρατηρήσεις και y_i, $i = 1, \ldots, 50$ οι νέες παρατηρήσεις. Θα είναι:

$$y_i = \frac{80}{100}t_i \Leftrightarrow y_i = \frac{4}{5}t_i \text{ για κάθε } i = 1,2, \ldots, 50$$

Επομένως, με βάση την εφαρμογή 3 (σελ.99 σχολικού βιβλίου) προκύπτει: $\bar{y} = \frac{4}{5}\bar{x}$ και

$$s_y = \left|\frac{4}{5}\right| \cdot s = \frac{4}{5} \cdot s$$

Έτσι, ο συντελεστής μεταβολής του νέου δείγματος χρόνων είναι:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{\frac{4}{5} \cdot s}{\frac{4}{5}\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV_x = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$$

Επειδή $CV_y > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Μάριος Παπαδιαμαντής, Χρήστος Αναστασίου, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Ηρώ Μαρκάκη