

ΘΕΜΑ Α

A1. γ A2. δ A3. α A4. δ

A5. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση το (i).

Υπολογίζουμε την απόσταση d_2 με Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΣΚΛ.

$$d_2 = \sqrt{(2\lambda_1)^2 + \left(\frac{3\lambda_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25\lambda_1^2}{4}} = \frac{5\lambda_1}{2}, d_2 - d_1 = \frac{5\lambda_1}{2} - 2\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{2}$$

Όταν διπλασιάζουμε την συχνότητα f η ταχύτητα των κυμάτων παραμένει σταθερή αλλά μεταβάλλεται το μήκος κύματος: $\begin{cases} u = \lambda_1 \cdot f \\ u = \lambda_2 \cdot 2f \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot f = \lambda_2 \cdot 2f \Leftrightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2$

$$\text{Έχουμε: } d_2 - d_1 = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{2\lambda_2}{2} = \lambda_2$$

Άρα: $d_2 - d_1 = \lambda_2$ ακέραιο πολλαπλάσιο του λ_2 επομένως το σημείο Σ είναι σημείο ενίσχυσης.

B2. Σωστή απάντηση το (iii).

Διατήρηση στροφορμής για το σώμα m :

$$\text{Είναι: } L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow muR = mu_{\tau\epsilon\lambda} \frac{R}{2} \Leftrightarrow v_{\tau\epsilon\lambda} = 2v \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για την κίνηση του σώματος:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_{\tau\epsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}mv^2 = W_F \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}m4\omega^2R^2 - \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = W_F \Leftrightarrow \frac{3}{2}m\omega^2R^2 = W_F$$

Β3. Σωστή απάντηση το (i).

Η εξίσωση συνέχειας δίνει:

$$A_{\Gamma} v_{\Gamma} = A_{\Delta} v_{\Delta} \Leftrightarrow 2A_{\Delta} v_{\Gamma} = A_{\Delta} v_{\Delta} \Leftrightarrow v_{\Delta} = 2v_{\Gamma}$$

Βεληνεκές: $S = 4h = v_{\Delta} \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Υψώνοντας στο τετράγωνο: $16h^2 = v_{\Delta}^2 \frac{2h}{g} \Leftrightarrow v_{\Delta}^2 = 8gh \Leftrightarrow h = \frac{v_{\Delta}^2}{8g} \Leftrightarrow h = \frac{v_{\Gamma}^2}{2}$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli: $P_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 = P_{\Delta} + \frac{1}{2}\rho v_{\Delta}^2 + \rho gh \Leftrightarrow$

$$P_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 = P_{\Delta} + \frac{1}{2}\rho v_{\Delta}^2 + \rho gh \Leftrightarrow$$

$$P_{\Gamma} - P_{\Delta} = \frac{1}{2}\rho v_{\Delta}^2 - \frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 + \rho gh \Leftrightarrow$$

$$P_{\Gamma} - P_{\Delta} = \frac{1}{2}\rho(2v_{\Gamma})^2 - \frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 + \frac{\rho g v_{\Gamma}^2}{2g} \Leftrightarrow$$

$$P_{\Gamma} - P_{\Delta} = 2\rho v_{\Gamma}^2.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το σώμα m_1 διέρχεται από τη ΘΙΤ της ταλάντωσής του, έχοντας ακριβώς πριν την κρούση ταχύτητα: v_{max_1} .

$$\text{Είναι } v_{max_1} = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} A_1 = \sqrt{\frac{50}{2}} \cdot \Delta l = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ m/sec}$$

Απομακρυνόμενο από την πηγή καταγράφει συχνότητα

$$f_1 = \frac{v - v_{max_1}}{v} \cdot f_s = \frac{340 - 2}{340} f_s = \frac{338}{340} f_s$$

Η κρούση που ακολουθεί είναι πλαστική και ισχύει:

$$(\text{ΑΔΟ}) : m_1 v_{1_{max}} = (m_1 + m_2) v_{2_{max}} \Rightarrow v_{2_{max}} = 1 \text{ m/sec}$$

Το συσσωμάτωμα εξακολουθεί ν' απομακρύνεται από τη ΘΙΤ και έχω:

$$f_2 = \frac{v - v_{max_2}}{v} \cdot f_s = \frac{340 - 1}{340} f_s = \frac{339}{340} f_s$$

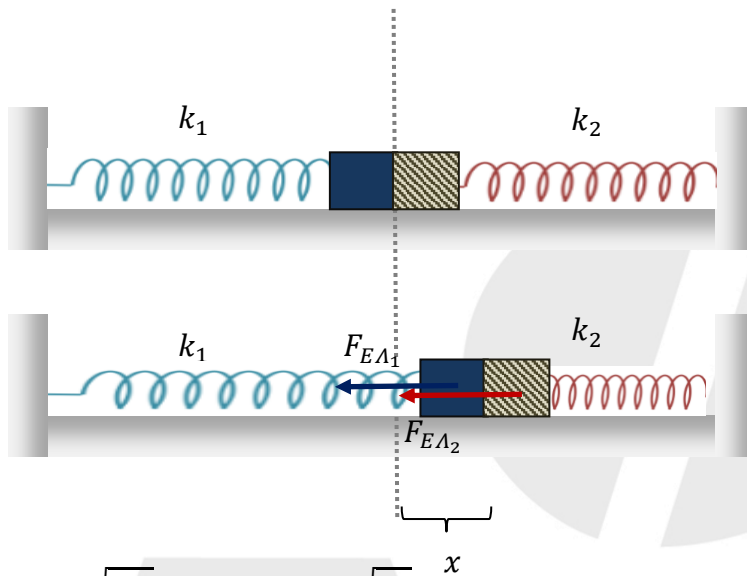
$$\text{Άρα } \frac{f_1}{f_2} = \frac{338}{339}.$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Γ2. Τα ελατήρια είναι οριζόντια και η θέση φυσικού μήκους ταυτίζεται με τη θέση ισορροπίας ταλάντωσης του συσσωμάτωματος. Το συσσωμάτωμα έχει σχεδιαστεί σε μια τυχαία απομάκρυνση x από m ΘΙΤ. (θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά). Για τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του ισχύει:

$$\Sigma F = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x, \text{ όπου: } k_1 = k_2 = k$$

Άρα $\Sigma F = -2kx$ όπου $2k = D$ η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης.



$$v_{max_2} = \sqrt{\frac{2k}{2m}} A \Rightarrow v_{max_2} = \sqrt{\frac{50}{2}} A \Rightarrow 5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5} m$$

Γ3. Πρόκειται για τη χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά στη δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσης του. Καθώς σε αυτή τη θέση δεν υπάρχει σχετική κίνηση παρατηρητή - πηγής.

Ο χρόνος μετάβασης από τη θέση της σύγκρουσης έως την παραπάνω ακραία θέση είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \text{ όπου } T \text{ η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωμάτωματος.}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{2k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{5} \text{ άρα } \Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ sec}$$

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωμάτωματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη. Δηλαδή: $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \Sigma F = -2kx$. Η μέγιστη τιμή του επιτυγχάνεται στις ακραίες θέσεις:

$$\left| \frac{\Delta P}{\Delta t} \right|_{max} = 2kA \text{ όπου } A \text{ το πλάτος ταλάντωσης του συσσωμάτωματος.}$$

$$\text{άρα } \left| \frac{\Delta P}{\Delta t} \right|_{max} = 2 \cdot 50 \frac{1}{5} = 20N.$$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300
Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει: $I_{\rho-\Delta(O)} = I_{\rho(O)} + I_{\Delta(O)}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Steiner για τη ράβδο

$$\begin{aligned} I_{\rho(O)} &= I_{cm(\rho)} + M \frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M l^2 = \\ &= \frac{1}{3} M l^2 = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 9 = 24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

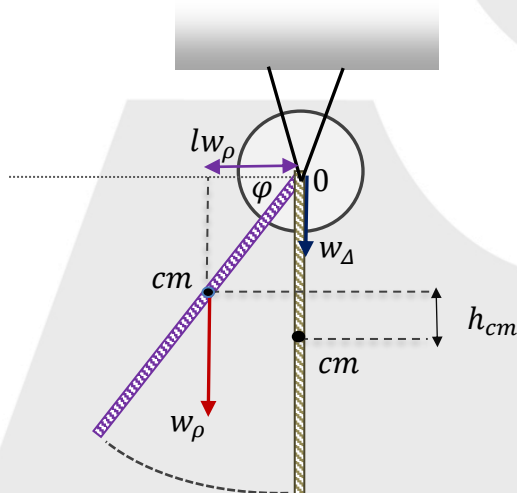
Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του

$$I_{\Delta(O)} = I_{cm(\Delta)} = \frac{1}{2} m_{\Delta} R_{\Delta}^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{4} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Οπότε συνολικά:

$$I_{\rho-\Delta(O)} = I_{\rho(O)} + I_{\Delta(O)} = 24 + 1 = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Δ2.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα $Z - \Gamma$.

Ροπή στο σύστημα ράβδος-δίσκος δημιουργεί, ως προς το (O) , μόνο το βάρος της ράβδου.

Οπότε ως προς το σημείο O έχουμε:

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_{\rho-\Delta} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = \tau_{w_{\rho}} = Mg \cdot l_{w_{\rho}}$$

όπου $l_{w_{\rho}}$ ο μοχλοβραχίονας του βάρους της ράβδου ως προς το (O) .

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300
Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$l_{w\rho} = \frac{l}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{2} \cdot 0,6 = 0,9m$$

$$\text{Τελικά: } \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\rho-\Delta} = 8 \cdot 10 \cdot 0,9 = 72 \text{ kg} \frac{m^2}{s^2}$$

Δ3. Στο σύστημα ράβδος - δίσκος έργο παράγει μόνο το βάρος της ράβδου.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας από την αρχική μέχρι την κατακόρυφη θέση της ράβδου έχουμε:

$$K_T - K_A = W_{w\rho}$$

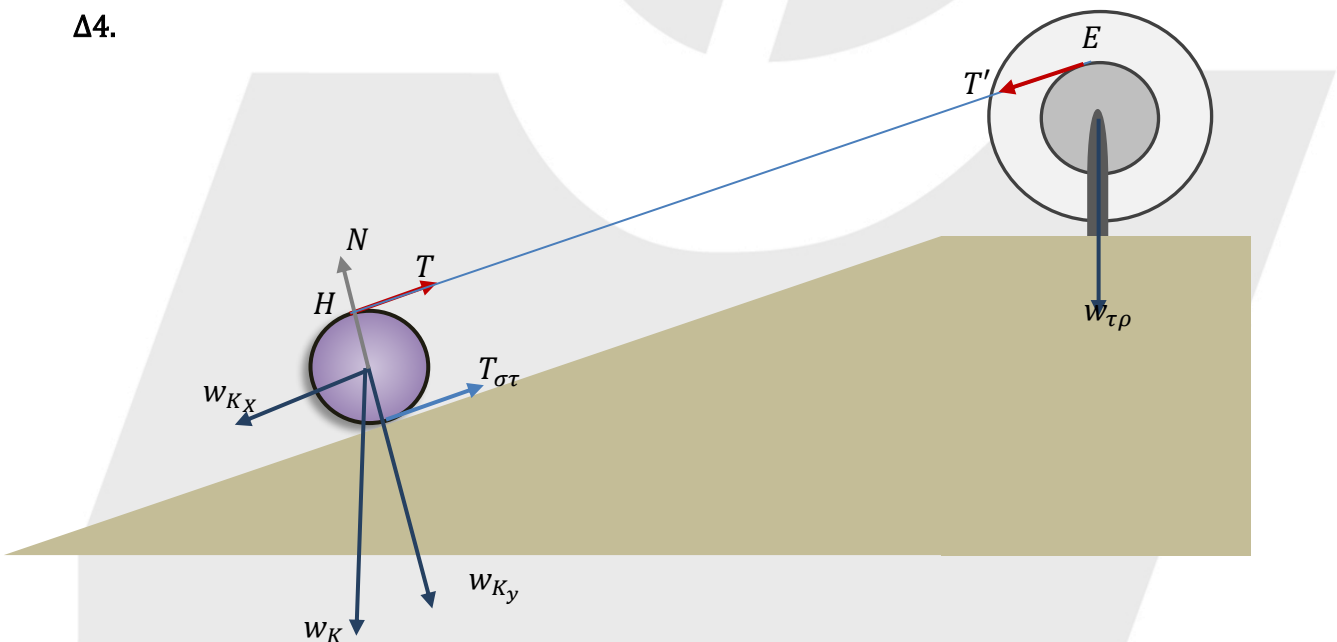
$$K_T = Mg \cdot h_{cm}$$

$$\text{Για το } h_{cm} \text{ έχουμε: } h_{cm} = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \eta\mu\varphi$$

$$h_{cm} = \frac{l}{2} (1 - \eta\mu\varphi) = \frac{3}{2} (1 - 0,8) = 0,3m$$

$$\text{Τελικά } K_T = 8 \cdot 10 \cdot 0,3 = 24 \text{ Joule}$$

Δ4.



Το νήμα (2) δεν ολισθαίνει στην τροχαλία, οπότε: $dS_E = dS_H$ και $v_E = v_H$, $\alpha_E = \alpha_H$.

Ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Άρα:

$$dS_{cm} = R \cdot d\theta_K, \quad v_{cm} = R \cdot \omega_K, \quad \alpha_{cm} = R \cdot a_{γκ}.$$

Το H είναι το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου, οπότε: $\alpha_H = 2\alpha_{cm}$.

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$$\bullet \Sigma F = m \cdot a_{cm} \Leftrightarrow mg \cdot \eta\mu\phi - T - T_{\sigma\tau} = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\bullet \Sigma\tau = I_{cm(K)} \cdot \alpha_{\gamma K} \Leftrightarrow$$

$$-TR + T_{\sigma\tau} \cdot R = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \alpha_{\gamma K} \Leftrightarrow T_{\sigma\tau} - T = \frac{1}{2}m \cdot a_{cm} \quad (2)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη:

$$mg \cdot \eta\mu\phi - 2T = \frac{3}{2}m \cdot a_{cm(K)} \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην τροχαλία έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_{cm(\tau\rho)} \cdot \alpha_{\gamma\tau\rho} \Rightarrow T' \cdot R = I_{cm(\tau\rho)} \cdot \alpha_{\gamma\tau\rho} \quad (4)$$

$$\text{Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό οπότε: } T = T' \quad (5)$$

Από τη σύνδεση των σημείων H και E έχουμε

$$\alpha_H = \alpha_E \Rightarrow 2\alpha_{cmK} = \alpha_{\gamma\tau\rho} \cdot R \text{ οπότε } \alpha_{\gamma\tau\rho} = \frac{2\alpha_{cmK}}{R} \quad (6)$$

Η σχέση (4) μέσω των (5) και (6) γίνεται:

$$T \cdot R = I_{cm\tau\rho} \cdot \frac{2\alpha_{cmK}}{R} \Rightarrow T = I_{cm(\tau\rho)} \cdot \frac{2\alpha_{cmK}}{R^2} \quad (7)$$

Η σχέση (3) μέσω της σχέση (7) γίνεται

$$mg \cdot \eta\mu\phi - 2 \cdot I_{cm\tau\rho} \frac{2\alpha_{cm(K)}}{R^2} = \frac{3}{2} m a_{cm(K)} \Leftrightarrow mg \cdot \eta\mu\phi = a_{cm(K)} \left(\frac{4I_{cm(\tau\rho)}}{R^2} + \frac{3}{2}m \right)$$

$$30 \cdot 10 \cdot 0,8 = a_{cm(K)} \left(\frac{4 \cdot 1,95}{0,04} + \frac{3}{2} \cdot 30 \right) \Leftrightarrow 240 = a_{cm}(195 + 45) \Rightarrow a_{cm} = 1 \text{ m/s}^2$$

Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\text{Άρα } s = \frac{1}{2} a_{cm(K)} \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_{cm}}} = 2s$$

$$v_{cm(K)} = a_{cm(K)} \cdot t_1 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ m/s}$$

Επιμέλεια:

Μπάμπης Μπέσης, Χαρίλαος Τσαγκαράκης, Στέφανος Μαυρογιώργης, Αντώνης Παρασκευάς,
Ιωάννης Τριανταφύλλου

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net