

## Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 111

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 104

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 128

A4.

α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

B1. Για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης έχουμε:

$$A_{g \circ h} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_h \text{ και } h(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

Ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}, \quad x > 0$$

B2.

i. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως ηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Επομένως η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e} \iff \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \iff f(\pi) < f(e)$$

Ισχύει ότι  $\pi > e$  και η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$  συνεπώς  $f(\pi) < f(e)$ .

B3.

Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται στο  $(0, +\infty)$ .

• Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο  $x = 0$ :

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - x^2}{x} = +\infty$$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Άρα, η ευθεία  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

- Αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  της μορφής  $y = \lambda x + \beta$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{4 - x^2}{x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{4 - x^2 + x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα, η ευθεία  $y = -x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

*B' Τρόπος:* Παρατηρούμε ότι:  $f(x) = \frac{4}{x} - x \Leftrightarrow f(x) + x = \frac{4}{x}$

Είναι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$  οπότε η ευθεία  $y = -x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

## B4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} \sin(1 + x^2)$  για  $x$  κοντά στο  $+\infty$  για την οποία ισχύει:

$$|\varphi(x)| = \left| \frac{1}{f(x)} \cdot \sin(1 + x^2) \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot |\sin(1 + x^2)| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow -\left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \varphi(x) \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right|, \quad (1)$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

Επομένως  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 0$ .

Άρα, με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ .

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[2,3]$  αφού  $f(x) = \frac{1}{x} + a$  για κάθε  $x \in [2,3]$  και είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Ακόμα:

$$\int_2^3 xf(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + ax) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[ x + \frac{ax^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9a}{2} - 2 - 2a = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{5a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

**Γ2. i)** Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = -1$$

Οπότε ορίζεται η  $f'(1)$  και είναι  $f'(1) = -1$ .

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ii) Επειδή  $f(1) = \frac{1}{1} + a = 1$ , αφού  $a = 0$ , η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $(1,1)$  είναι:

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Και η γωνία που σχηματίζεται με τον  $x'x$  είναι  $\frac{3\pi}{4}$  rad αφού  $f'(1) = -1$

$\Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = -1, \omega \in [0, \pi)$ , όπου  $\omega$  η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον  $x'x$ .

**Γ3.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα και συνεχής εκεί.

Είναι:

- για κάθε  $x < 1$ :  $f'(x) = 2x - 3$  και  $x < 1 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow 2x - 3 < -1 < 0$
- για κάθε  $x > 1$ :  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Συνεπώς,  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  κι επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 1$  θα είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα και «1-1»

Για το σύνολο τιμών της  $f$  είναι:  $f((-\infty, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$

αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

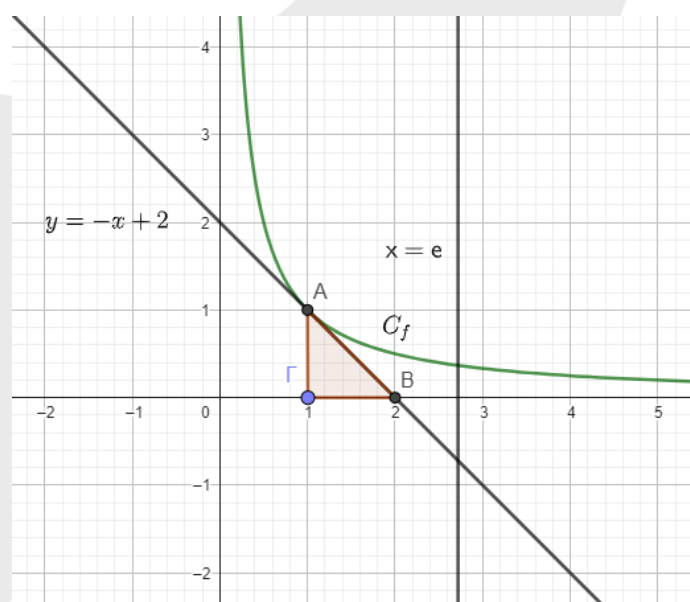
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = +\infty$$

**Γ4.**

Το χωρίο μεταξύ της  $C_f$ , της εφαπτομένης στο σημείο  $(1, f(1))$  και του άξονα  $x'x$  φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Αρκεί να υπολογίσουμε το:

$\int_1^e f(x) dx - (AB\Gamma)$ , αφού για κάθε  $x \geq 1$  είναι  $f(x) = \frac{1}{x} > 0$  και όπως φαίνεται κι απ' το σχήμα η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο  $A$ , οπότε:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^e f(x) dx - (AB\Gamma) \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{(A\Gamma)(B\Gamma)}{2} = [\ln|x|]_1^e - \frac{1 \cdot 1}{2} \end{aligned}$$



# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$= \ln e - \ln 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

$$E = \int_1^e (f(x) + x - 2) dx - \frac{(\Gamma\Delta) \cdot (B\Delta)}{2} = \left[ \ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^e - \frac{(e-2) \cdot (e-2)}{2}$$
$$= 1 + \frac{e^2}{2} - 2e - \frac{1}{2} + 2 - \frac{(e-2)^2}{2} = \frac{e^2 - 4e + 5}{2} - \frac{e^2 - 4e + 4}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

με  $B$  να είναι το σημείο τομής της  $y = -x + 2$  και της  $x = e$ , οπότε το  $B(e, 2 - e)$ .

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι  $f(1) = k - 1$  και η  $f$  συνεχής στο  $x = 1$  άρα  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$ ,  $x \in (0,1) \cup (1,2)$  με  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ .

Τότε  $f(x) = g(x)(x-1) + 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x-1) + 2x) = \ell \cdot 0 + 2 = 2$

Τελικά  $f(1) = k - 1 = 2 \Leftrightarrow k = 3$ .

**Δ2.** Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $(0,2)$  με

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)}$$

Είναι  $x \in (0,2)$  επομένως  $x - 2 < 0$ ,  $x + 2 > 0$ ,  $x^2 > 0$ .

Έτσι έχουμε  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0,1)$  και  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0,1]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$$f((0,1]) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$ . Επίσης

$$f((1, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$ .

Είναι  $0 \in f((0,1])$  και  $f$  γνησίως μονότονη στο  $(0,1]$  επομένως υπάρχει μοναδικό  $x_1 \in (0,1]$  με  $x_1 \neq 1$  τέτοιο ώστε  $f(x_1) = 0$

Επίσης είναι  $0 \in f((1, +\infty))$  και  $f$  γνησίως μονότονη στο  $(1, +\infty)$  επομένως υπάρχει μοναδικό  $x_2 \in (1, +\infty)$  τέτοιο ώστε  $f(x_2) = 0$ .

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0,1)$  και  $x_1, \frac{1}{3} \in (0,1)$  επομένως αφού  $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) > 0$  θα έχουμε:

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} > x_1$$

### Δ3. Α' τρόπος:

- $f$  συνεχής στο  $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$  ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων
- $f$  παραγωγίσιμη στο  $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$  με  $f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$

Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,2)$  με  $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$  επομένως η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,1)$ . Επομένως, υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$  δηλαδή η κλίση της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  ισούται με  $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$ .

**Β' τρόπος:** Έχουμε την εξίσωση  $f'(x) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$ . Είναι  $f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow 3f\left(\frac{1}{3}\right) > 0$  και  $\frac{1}{3} > x_1$

$\Rightarrow 1 - 3x_1 > 0$  οπότε  $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1} > 0$ . Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,2)$  με  $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$  επομένως η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,1)$ .

Έτσι:  $f'((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)\right) = (0, +\infty)$

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

Είναι:  $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1} \in f'((0,1))$  και  $f'$  γνησίως μονότονη, επομένως υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (0,1)$

τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$  δηλαδή η κλίση της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο

$M(\xi, f(\xi))$  ισούται με  $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$ .

**Δ4. i)** Οι  $F, G$  είναι αρχικές της  $f$  στο  $(0,2)$  επομένως ισχύει  $F'(x) = G'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in (0,2)$  και υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $F(x) = G(x) + c, x \in (0,2)$ .

Για  $x = x_1$  έχουμε  $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1)$

Για  $x = x_2$  έχουμε  $F(x_2) = G(x_2) - G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow G(x_1) + F(x_2) = 0$  που είναι ζητούμενο.

**Β' τρόπος:** Έχουμε  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = G(x_2) - G(x_1)$

Οπότε:  $F(x_2) - 0 = 0 - G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$ .

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ii) Έχουμε την εξίσωση :  $x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0$

Έστω  $h(x) = x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0, x \in (0,2)$ .

Αν  $x \in (x_1, x_2)$  τότε  $f(x) > 0$  επομένως  $F'(x) = G'(x) > 0$  στο  $(x_1, x_2)$ . Άρα  $F, G$  είναι γνησίως αύξουσες στο  $[x_1, x_2]$ . Έτσι:  $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$

και  $x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2) \Rightarrow G(x_1) < 0$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $h(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) + x_1 - x_2 = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$   
αφού  $x_2 > 0, G(x_1) < 0$  και  $x_1 - x_2 < 0$
- $h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) + x_2 - x_1 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$   
αφού  $F(x_2) > 0, x_1 > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$ .

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\rho \in (x_1, x_2)$  με  $h(\rho) = 0$  δηλαδή το  $\rho$  είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,2)$  με  $h'(x) = x_1f(x) + x_2g(x) + 2 > 0$ , για κάθε  $x \in (x_1, x_2)$  αφού  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (x_1, x_2)$  και  $x_1, x_2 > 0$ .

Επομένως η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(x_1, x_2)$  και το  $\rho$  είναι μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

## Επιμέλεια:

Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Μάριος Παπαδιαμαντής,  
Γιάννης Παπαβασιλείου, Παναγιώτης Συνοδινός, Νίκος Αλεξόπουλος, Κωνσταντίνα Μωραΐτη,  
Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Μαρκάκης Ιάσοντας, Ηρώ Μαρκάκη

## Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

### Υπολογισμός Μορίων Πανελλαδικών 2023

Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή για να **υπολογίσετε Μόρια**  
για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα / Σχολή!

**Υπολογίστε Μόρια**, δείτε τα **Τμήματα Επιτυχίας** (με τις περσινές βάσεις), τις **Ελάχιστες Βάσεις Εισαγωγής** για κάθε Ειδικό Μάθημα και για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα μέσα από την [ιστοσελίδα](#) του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ ή την Android Εφαρμογή: [mobile app](#)

