ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx = \pi$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$. **Μονάδες 6**

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

β) Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

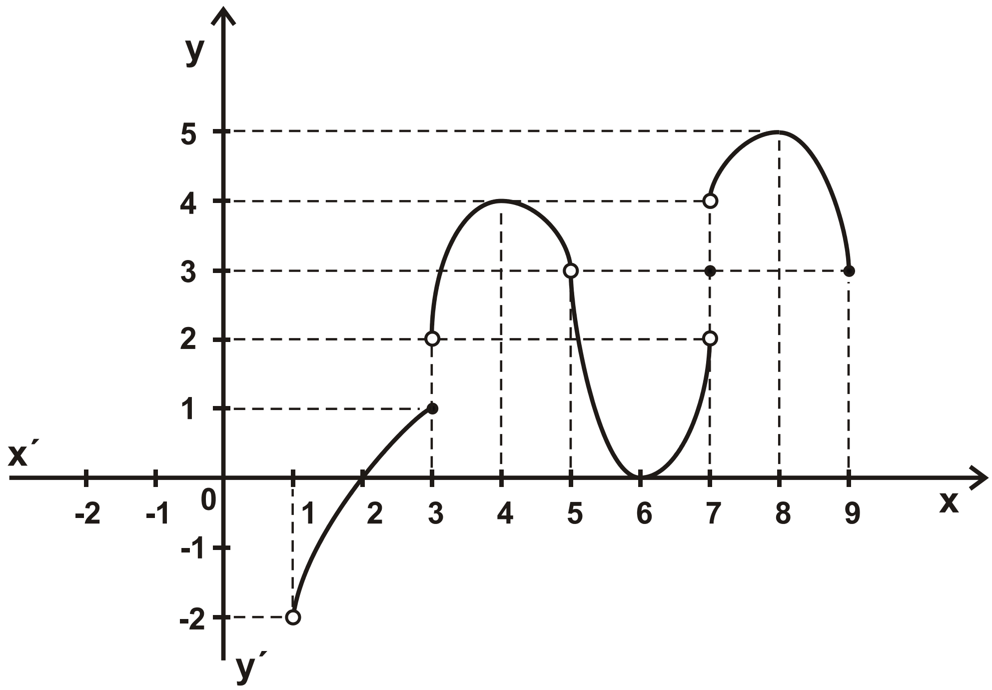
ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

$$\text{αν } \int_\alpha^\beta f(x)\,dx>0 \text{, τότε } f(x)>0 \text{ στο } [\alpha,\beta].$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_o) = 0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f(x-\frac{1}{6}x^3).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx\ .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1\\ 1 & ,x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1\end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_o=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Μονάδες 8

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_o$, όπου x_o η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-{x_o}^2-2x_o+2}{2}.$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2),\quad \text{για κάθε } x>1.$$

Μονάδες 5

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = 0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B \neq \varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim_{x\to -\infty}\alpha^x = +\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ell nx,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1): $y=-x$ και (ε_2): $y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e-1-\pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0) \\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_O)=0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Ν*α γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1}.

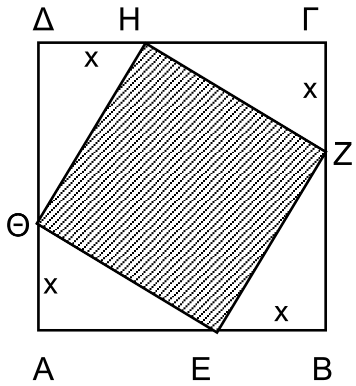
δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν f(α) = f(β), τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in$ (α,β) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2$$

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

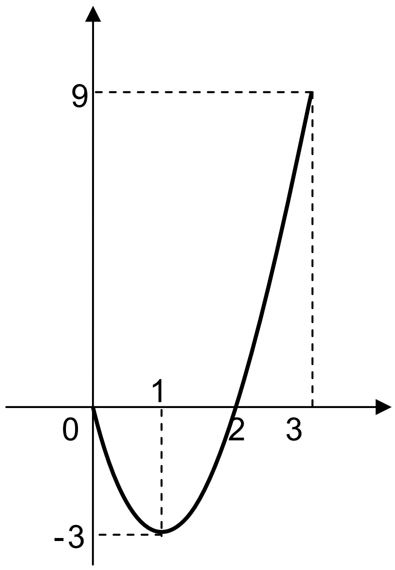
Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_o \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_o)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_o}+1$ cm^2.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2,\ f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{ημx}{x}+α, & -\dfrac{π}{2}\le x<0 \\ 2, & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0. \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0,2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $α\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $π<\displaystyle\int_{\frac{-π}{2}}^{2} f(x)\,dx<\dfrac{3π}{2}-1$.

Μονάδες 7

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\dfrac{-π}{2}\cdot x)=f(\dfrac{-π}{2}\cdot e^{-x})$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\text{συν}x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2},\quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\quad x\in(0,8).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad$ με $\quad \alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}\ .$$

Μονάδες 9

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

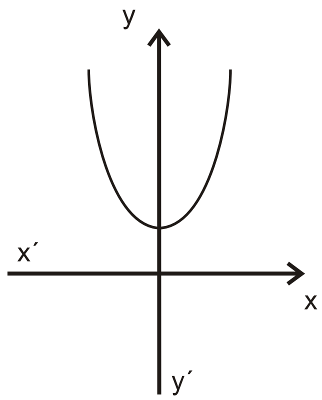
Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Μονάδες 7

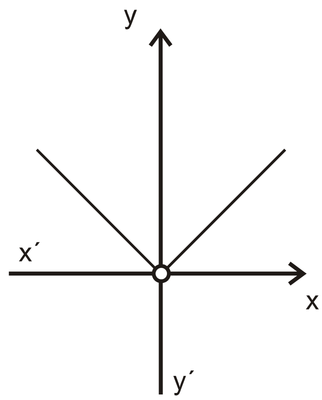
Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 4

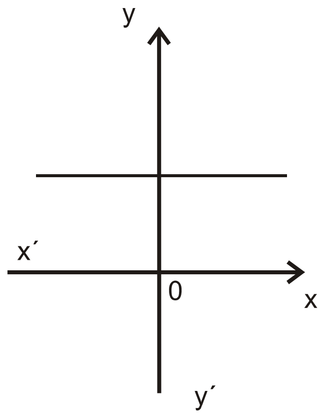
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



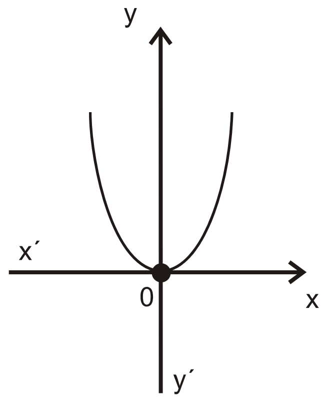
(f)



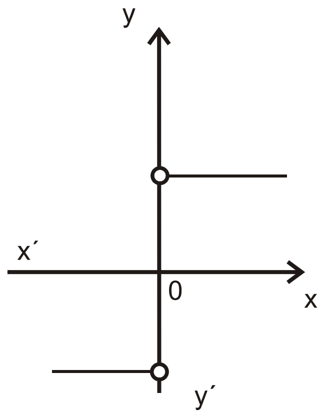
(g)



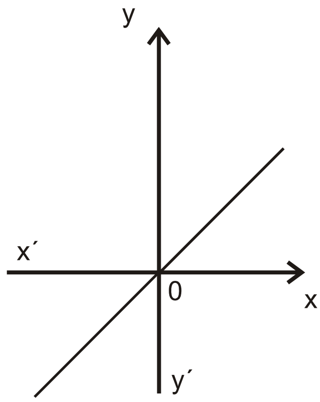
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)] = 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ‘1-1’, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x>1 \\ x^2+\alpha, & x\leq 1 \end{cases}$.

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 4]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, με τύπο: $f(x)=2\,\eta\mu x-x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o\in[0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_o, f(x_o))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

Μονάδες 8

Γ4. **α)** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}[(f(x)-f(2x))\cdot \ln x]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>2^{f(x)}-1$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0,\ \text{όπου } 0<\alpha<1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e)=e\cdot\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2<F(1)<\ln(\dfrac{2^{e+1}}{e+1})$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

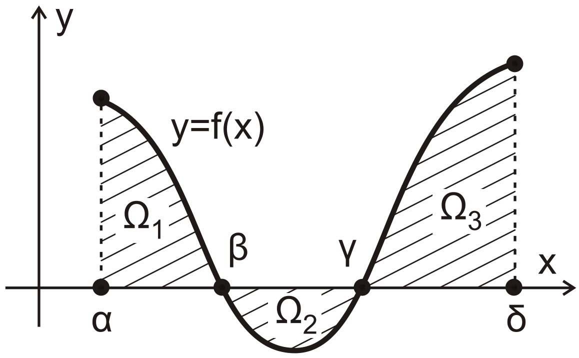
Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$,

τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:



α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ell n(x-2)$, $x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_o f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $M\overset{\Delta}{O}K$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\,\ell n(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ell n(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει:

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_o.

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και

$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g\circ f$ στο $+\infty$.

Μονάδες 6

Β3. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_o=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-2}$.

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x)=\begin{cases}(g\circ f)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,\ 1)\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot\eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,\ 2]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,\ 1)$. Έστω το σημείο $A(\dfrac{3}{2},\ 0)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,\ +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0<g(x)<1$ για κάθε $x\geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία ανήκει στο $(0,\ 1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\dfrac{1}{2}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx<1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $(0,\ \frac{\pi}{2})$ την εξίσωση

$$f(\eta\mu^2x)+f(\sigma\upsilon\nu^2x)=f(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}})\ .$$

Μονάδες 9

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ